EXERCICE№13

$f(x) = \tan x$

1) $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$

$0 \le x \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 0 \le \tan x \le \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ car la fonction tan est croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

$\Rightarrow 0 \le \tan x \le 1 \Rightarrow 0 \le \tan^2 x \le 1 \Rightarrow 1 \le 1 + \tan^2 x \le 2$

$\Rightarrow 1 \le f'(x) \le 2$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

2) pour $t \in [0, x]$: $1 \le f'(x) \le 2$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis.

$1(x - 0) \le f(x) - f(0) \le 2(x - 0)$

$\Rightarrow x \le \tan x \le 2x$

EXERCICE№14

Soit $f(t) = \sqrt{1 + t}$

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$

$0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$ pour $t \in [0, x]$ d'où : $0 \le f(x) - f(0) \le \frac{1}{2}x$

Par suite : : $0 \le \sqrt{1 + x} - 1 \le \frac{1}{2}x$

2) d'après la 1ère) question : : $0 \le \sqrt{1 + u} - 1 \le \frac{1}{2}u$ pour $u \ge 0$

Pour $u = \frac{1}{x^2}$ on aura : $0 \le \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \le \frac{1}{2x^2}$

$\Rightarrow 1 \le \frac{1}{x}\sqrt{1 + x^2} - 1 \le 1 + \frac{1}{2x^2} \Rightarrow x \le \sqrt{1 + x^2} - 1 \le x + \frac{1}{2x}$ car $x > 0$

EXERCICE№15

a) soit $f(t) = \sin t$; f est dérivable sur IR et $f'(t) = \cos t$

$|f'(t)| \le 1$ d'où : $|f(x) - f(0)| \le 1|x - 0|$

$\Rightarrow |f(x)| \le |x| \Rightarrow |\sin x| \le |x|$

b) soit $f(t) = \tan t$; f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(t) = 1 + \tan^2 t \ge 1$

pour tout $t \in [0, x]$ d'où : $f(x) - f(0) \ge 1(x - 0) \Rightarrow \tan x \ge x$

c) soit $f(t) = \cos t$; f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(t) = -\sin t$

pour $t \in [0, x]$: $-1 \le f'(x) \le 1$ d'où : $-x \le f(x) - f(0) \le x$

$\Rightarrow -x \le \cos x - 1 \le x \Rightarrow 1 - x \le \cos x \le x + 1$

EXERCICE№16

$f(x) = (x - 1)\sqrt{1 - x}$

1) $D_f =]-\infty, 1]$

2) $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x} = 0$

f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 0$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn